



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A X-a

Soluții și bareme de corectare

### SUBIECTUL I (40 de puncte)

| Subiect        | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Răspuns corect | B  | D  | A  | C  | E  | B  | C  | A  | D  | E  |
|                | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p |

### SUBIECTUL II (25 de puncte)

Arătați că:

a)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , pentru orice  $a, b > 0$

b)  $\log_a \left( \frac{2b}{a+b} \right) + \log_b \left( \frac{2a}{a+b} \right) \geq 0$ , pentru orice  $a, b \in (0, 1)$ .

Supliment Gazeta Matematică nr. 10 / 2025

**Soluție.**

a)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$  ..... 6p

b) Conform punctului a) avem:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{2b}{a+b} \leq \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{2b}{a+b} \leq \sqrt{\frac{b}{a}}$ , iar cum  $a \in (0, 1)$ ,

obținem  $\log_a \left( \frac{2b}{a+b} \right) \geq \log_a \left( \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$  ..... 5p

Analog, obținem  $\log_b \left( \frac{2a}{a+b} \right) \geq \log_b \left( \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$  și adunând cu inegalitatea precedentă rezultă că:

$$\log_a \left( \frac{2b}{a+b} \right) + \log_b \left( \frac{2a}{a+b} \right) \geq \frac{1}{2} \left( \log_a \left( \frac{b}{a} \right) + \log_a \left( \frac{a}{b} \right) \right) = \frac{1}{2} (\log_a b + \log_b a - 2)$$

..... 5p

Concluzia rezultă din faptul că  $\log_a b > 0$  și  $\log_a b + \log_b a - 2 = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} - 2 = \frac{(\log_a b - 1)^2}{\log_a b} \geq 0$  ..... 9p

### SUBIECTUL III (25 de puncte)

Se consideră numerele complexe  $z_1, z_2, z_3$ , cu  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .

a) Dacă  $z_1 z_2 z_3 \neq -1$  și  $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_1 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3}$ , arătați că  $\operatorname{Re}(z) = 0$

b) Dacă  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$  și  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ , atunci calculați  $|z_1 + z_2 + z_3|$ .

**Soluție.**

a)  $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$  și analog  $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}, \overline{z_3} = \frac{1}{z_3}$  ..... 3p



$$\frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_2 z_3} - \frac{1}{z_1 z_3}}{1 + \frac{1}{z_1 z_2 z_3}} = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 - z_1 - z_2 - z_3}{z_1 z_2 z_3 + 1} = -z \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \dots\dots\dots 6p$$

b) Notăm  $|z_1 + z_2 + z_3| = r$ ,  $r > 0$ .

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) \Rightarrow (z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) \dots\dots\dots 6p$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3}^2 = 2 \left( \frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_3} \right) \Rightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3}^2 = 2 \cdot \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1 z_2 z_3} \dots\dots\dots 6p$$

Trecând la modul, obținem  $r^2 = 2r$ , și cum  $r > 0$ , rezultă  $r = 2 \dots\dots\dots 4p$